المعهد النموذجي بسليانة

المادّة : الرياضـــــــيات | المستوى : 9 أ ن 1 و 2 و 3
الأستاذان: المديوني-الورفلي | الحصّـــــــة : ساعـــتان

فرض تأليفي عـ1ـدد
الأربعاء 2019.03.05

الإصلاح

تمرين 1 : 1. ج. 2. ب. 3. ب. 4. ب.

تمرين 2 : $9x^2 = 2x^2 + 19x - 10$

1. $(x-2)^2 = x^2 - 2x2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$.

2. أ. $7(x-2)^2 + 9x - 18 = 7(x^2 - 4x + 4) + 9x - 18 = 7x^2 - 28x + 28 + 9x - 18$

$= 7x^2 - 19x + 10 = A$

ب. $A = 7(x-2)^2 + 9x - 18 = 7(x-2)(x-2) + 9(x-2) = (x-2)[7(x-2)+9]$

$= (x-2)[7x - 14 + 9] = (x-2)(7x-5)$

3. المثلّث ACM قائم الزّاوية في A و $[AB]$ ارتفاعه الصّادر من A

إذًا $BA^2 = BC \times BM$ يعني $(3x)^2 = (x+10)(2x-1)$ يعني $9x^2 = 2x^2 - x + 20x - 10$

يعني $9x^2 = 2x^2 + 19x - 10$ يعني $9x^2 - 2x^2 - 19x + 10 = 0$

يعني $7x^2 - 19x + 10 = 0$ يعني $A = 0$

يعني $(x-2)(7x-5) = 0$ يعني $x - 2 = 0$ أو $7x - 5 = 0$

يعني $x = 2$ أو $7x = 5$ يعني $x = 2$ أو $x = \frac{5}{7}$

و بما أنّ x عدد حقيقي أكبر من 1 فإنّ $x = 2$.

تمرين 3:

1. $a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})^2 = \frac{1}{2}(1^2 + 2\times1\times\sqrt{3} + \sqrt{3}^2) = \frac{1}{2}(1 + 2\sqrt{3} + 3) = \frac{1}{2}(4 + 2\sqrt{3})$

$= \frac{1}{2}\times 4 + \frac{1}{2}\times 2\sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$

و $b = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) + \sqrt{2}\left(1 - \sqrt{\frac{9}{8}}\right) = \sqrt{5}^2 - 1^2 + \sqrt{2}\times 1 - \cancel{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}\times\cancel{\sqrt{2}}}$.

$= 5 - 1 + \sqrt{2} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} + \sqrt{2}$

2. أ. $a^2 = (2+\sqrt{3})^2 = 2^2 + 2\times2\times\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$

و $b^2 = \left(\frac{5}{2} + \sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \cancel{2}\times\frac{5}{\cancel{2}}\times\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = \frac{25}{4} + 2\sqrt{3} + 3 = \frac{33}{4} + 5\sqrt{2}$.

ب. لنا $(4\sqrt{3})^2 = 48$ و $(5\sqrt{2})^2 = 50$ إذًا $(4\sqrt{3})^2 < (5\sqrt{2})^2$

و بما أنّ $4\sqrt{3}$ و $5\sqrt{2}$ موجبان فإنّ $4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$.

ج. لنا $4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$ و $7=\frac{28}{4}<\frac{33}{4}$ إذًا $7+4\sqrt{3} < \frac{33}{4}+5\sqrt{2}$ أي $a^2<b^2$

و بما أنّ a و b موجبان فإنّ $a < b$.

3. أ. $ac=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=2^2-\sqrt{3}^2=4-3=1$ إذًا c مقلوب a.

ب. $bc=\left(\frac{5}{2}+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{5}{\cancel{2}}\times\cancel{2}-\frac{5}{2}\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{3}=5+2\sqrt{2}-\frac{5}{2}\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

ج. لنا $a < b$ و $c\in\mathbb{R}_+^*$ لأنّ $c=\frac{1}{b}$ و $b=\frac{5}{2}+\sqrt{2}\in\mathbb{R}_+^*$

إذًا $ac < bc$ أي $1<5+2\sqrt{2}-\frac{5}{2}\sqrt{3}-\sqrt{6}$

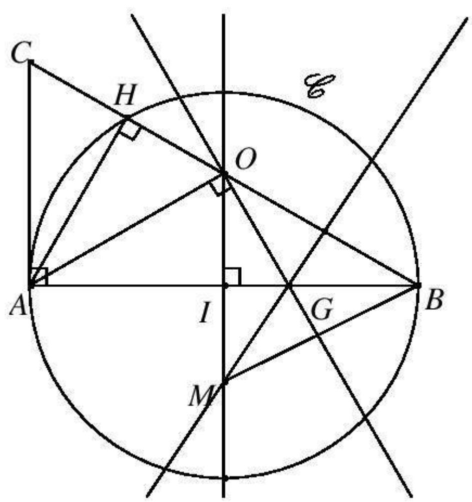
و منه $5+2\sqrt{2}-\frac{5}{2}\sqrt{3}-\sqrt{6}-1>0$ أي $4+2\sqrt{2}-\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)>0$

وهكذا $4+2\sqrt{2} > \frac{5}{2}\sqrt{3}+\sqrt{6}$ في النّهاية $2\left(2+\sqrt{2}\right) > \frac{5}{2}\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

تمرين 4:

1. ABC مثلّث قائم الزّاوية في A إذًا حسب نظريّة بيتاغور $BC^2=AB^2+AC^2=6^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2=36+12=48$

و منه $BC=\sqrt{48}=\sqrt{16}\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.



2. أ. في المثلّث ABC :
- I منتصف الضلع $[AB]$
- $O\in[BC]$ بحيث $(OI)//(AC)$ (عموديان على (AB))

إذًا O منتصف $[BC]$

ب. في المثلّث ABC :
- I منتصف $[BA]$
- O منتصف $[BC]$

إذًا $OI=\frac{AC}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

ج. المثلّث ABC قائم الزّاوية في A و O منتصف وتره $[BC]$

إذًا $OA=OB=OC=\frac{BC}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

و بما أنّ $AC=2\sqrt{3}$ فإنّ $OA=OC=AC$.

فالمثلّث OAC متقايس الأضلاع.

3. أ. الدّائرة $\mathscr{C}$ قطرها $[AB]$ و $H\in\mathscr{C}$.

إذًا المثلّث ABH قائم الزّاوية في H.

ب. المثلّث ABC قائم الزّاوية في A و $[AH]$ ارتفاعه الصّادر من A

إذًا $AH=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{6\times 2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=3$.

4. أ. المثلّث OAG قائم الزّاوية في O و $[OI]$ ارتفاعه الصّادر من O

إذًا $IA\times IG=IO^2$ ومنه $IG=\dfrac{IO^2}{IA}=\dfrac{\sqrt{3}^2}{\sqrt{3}}=1$

ب.• المستقيم (AB) عمودي على قطعة المستقيم $[AB]$ و يمرّ من منتصفها I

لأنّ $(AB)\perp(OI)$ و M مناظرة O بالنّسبة إلى I.

إذًا (AB) هو الموسّط العمودي لِ$[AB]$

ومنه $BO=BM$ ($B\in(AB)$)

زيادة على ذلك $OM=2OI=2\sqrt{3}=OB$ (لأنّ I منتصف $[OM]$)

إذًا $BO=BM=OM$

فالمثلّث OBM متقايس الأضلاع.

• في المثلّث OBM :

- $[BI]$ هي الموسّط الصّادر من A (لأنّ I منتصف $[OM]$)

- $G\in[BI]$ بحيث $BG=\dfrac{2}{3}BI$ لأنّ $\dfrac{BI}{BG}=\dfrac{BG-IG}{BG}=\dfrac{3-1}{3}=\dfrac{2}{3}$

إذًا G هي مركز ثقل المثلّث OBM.

و بما أنّ المثلّث OBM متقايس الأضلاع فإنّ G هي المركز القائم لذلك المثلّث

و بالتّالي (MG) يحمل الإرتفاع الصّادر من M في المثلّث OBM

و هكذا $(MG)\perp(BO)$ أي $(MG)\perp(BC)$ ($C\in(OB)$)

__تمرين 5:__

1. • CMN مثلّث قائم الزّاوية في C إذًا حسب نظريّة بيتاغور $MN^2=CM^2+CN^2=x^2+x^2=2x^2$

• BAM مثلّث قائم الزّاوية في B إذًا حسب نظريّة بيتاغور $AM^2=BA^2+BM^2=4^2+(4-x)^2$

$$=16+4^2-2\times 4x+x^2$$
$$=x^2-8x+32$$

و بالمثل $AN^2=x^2-8x+32$.

2. $MN^2-AM^2=2x^2-(x^2-8x+32)=2x^2-x^2+8x-32$

$$=x^2+8x-32$$

3. أ. $(x+4)^2-48=x^2+2x4+4^2-48=x^2+8x+16-48=x^2+8x-32$

ب. المثلّث AMN متقايس الأضلاع يعني $AM=AN=MN$ يعني $AM^2=AN^2=MN^2$

يعني $MN^2-AM^2=0$ ($AM^2=AN^2$) يعني $x^2+8x-32=0$

يعني $(x+4)^2-48=0$ يعني $(x+4)^2-(4\sqrt{3})^2=0$

يعني $(x+4-4\sqrt{3})(x+4+4\sqrt{3})=0$ يعني $x+4-4\sqrt{3}=0$ أو $x+4+4\sqrt{3}=0$

يعني $x=4\sqrt{3}-4=4(\sqrt{3}-1)$ أو $x=-4\sqrt{3}-4=-4(\sqrt{3}+1)$

و بما أنّ $x\in\mathbb{R}_+^*$ فإنّ $x=4(\sqrt{3}-1)$.